ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione suppletiva

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA.
3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4) Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5) Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

PROBLEMA 2

1) Una funzione $f(x)$ si definisce limitata nel suo insieme di definizione A se esiste un numero reale positivo M tale che $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$.

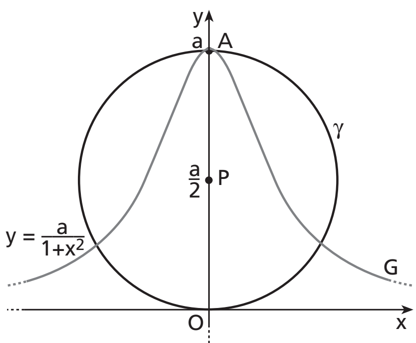
La funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Osservando che $1+x^2 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si può scrivere $|f_a(x)| = \left|\dfrac{a}{1+x^2}\right| \leq |a|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è limitata nel campo reale.

2) Si studia il grafico G della funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, con a positivo. Essa ha campo di esistenza reale; è simmetrica rispetto all'asse delle y ed è sempre positiva; ha asintoto orizzontale $y=0$, poiché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a}{1+x^2} = 0$; ha derivata $f'_a(x) = \dfrac{-2ax}{(1+x^2)^2}$, pertanto ha massimo assoluto nel punto $A(0;\ a)$; ha derivata seconda $f''_a(x) = \dfrac{-2a(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$, dunque ha flessi nei punti $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

La circonferenza di diametro OA ha centro nel punto $P\left(0;\ \dfrac{a}{2}\right)$ e raggio uguale ad $\dfrac{a}{2}$. La sua equazione è:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella figura 4 è rappresentato il grafico G della funzione f_a per un generico a e il grafico γ della circonferenza.



▲ **Figura 4.**

3) Per determinare le intersezioni delle curve γ e G bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \dfrac{a}{1+x^2} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è:

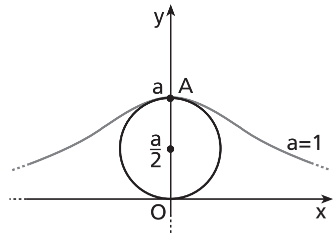
$$x^2 + \frac{a^2}{(1+x^2)^2} - \frac{a^2}{1+x^2} = 0 \ \rightarrow \ x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0 \ \rightarrow \ x^2(1+x^2)^2 - a^2x^2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x^2(x^4 + 2x^2 - a^2 + 1) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto: $x^2 = 0 \vee x^2 = -1 \pm a$.
Tenendo conto che a è positivo, le soluzioni sono: $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-1+a}$.
In particolare:

se $a > 1$, le curve si intersecano in tre punti: $(0;\ a)$, $(-\sqrt{a-1};\ 1)$, $(\sqrt{a-1};\ 1)$;
se $a \leq 1$, le curve hanno solo il punto $(0;\ 1)$ in comune.

La figura 4 mostra dunque il caso in cui $a > 1$, mentre la figura 5 rappresenta le due curve per $a = 1$.

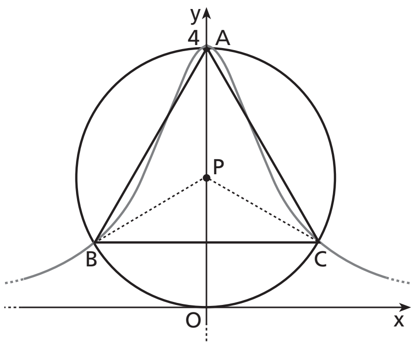


▲ **Figura 5.**

4) Indicati con A, B, C i punti di intersezione delle due curve (figura 6), le loro coordinate sono: $A(0;\ a)$, $B(-\sqrt{a-1};\ 1)$, $C(\sqrt{a-1};\ 1)$, con $a > 1$.
Sfruttando la simmetria della figura, affinché il triangolo ABC sia equilatero, è sufficiente imporre $\overline{AC} = \overline{BC}$:

$$\sqrt{(\sqrt{a-1})^2 + (1-a)^2} = 2\sqrt{a-1} \to \sqrt{a-1+1+a^2-2a} =$$
$$= 2\sqrt{a-1} \to \sqrt{a^2-a} = 2\sqrt{a-1}.$$

Elevando al quadrato e semplificando per $(a-1)$ si ottiene $a = 4$.



▲ **Figura 6.**

5) La funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ è continua e positiva in tutto il campo reale per $a > 0$. Affinché essa sia una funzione densità di probabilità deve valere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1$.
Pertanto si calcola il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = a(\lim_{z\to+\infty} \operatorname{arctg} z - \lim_{z\to-\infty} \operatorname{arctg} z) = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a\pi,$$

e si pone uguale a 1, cioè $a\pi = 1 \to a = \dfrac{1}{\pi}$.
Il valore a' per cui la funzione è una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X, è $a' = \dfrac{1}{\pi}$. La densità ha quindi equazione: $f_{\frac{1}{\pi}}(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
La funzione di distribuzione (o di ripartizione) $F(x)$ di una variabile aleatoria continua X è definita come $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Essa fornisce la probabilità che la variabile X non superi un determinato valore x ed è primitiva della funzione densità di probabilità $f(x)$. Nel caso specifico ha espressione:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}[\operatorname{arctg} x - \lim_{z\to-\infty} \operatorname{arctg} z] = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$